日本機械学会論文集(A 編)
70 巻 689 号(2004-1)

論文 No. 03-0285

# 切欠き形状の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える計算式*
## (円周切欠きを有する丸棒ねじり試験片)

野田尚昭*1, 高瀬 康*1, 江藤洋介*2

# Convenient Stress Concentration Formula Useful for Any Shape of Notch in a Round Test Specimen
## (Torsion of a Round Bar Having a V-Shaped and Circular-Arc Notch)

Nao-Aki NODA*3, Yasushi TAKASE and Yousuke ETOU

*3 Department of Mechanical Engineering, Kyushu Institute of Technology,
1-1 Sensui-cho, Tobata-ku Kitakyushu-shi, Fukuoka, 804-8550 Japan

In this work, stress concentration factors (SCFs) of a round bar with a circular-arc or V-sharped notch $K_t$ are considered on the basis of exact solutions for special cases and accurate numerical results. First, for the limiting cases of deep and shallow notches, the body force method is used to calculate the SCFs ; then, the formulas are obtained as $K_{td}$ and $K_{ts}$. On the one hand, upon comparison of $K_t$ and $K_{td}$. it is found that $K_t$ is nearly equal to $K_{td}$ if the notch is deep or blunt. On the other hand, if the notch is sharp or shallow, $K_t$ is mainly controlled by $K_{ts}$ and the notch depth. The notch shape is classified into several groups according to the notch radius and notch depth ; then, the least squares method is applied for calculation of $K_t/K_{td}$ and $K_t/K_{ts}$. Finally, a set of convenient formulas useful for any shape of notch in a round test specimen is proposed. The formulas yield SCFs with less than 1% error for any shape of notch. The effect of notch opening angle on the SCF is also considered for the limiting cases of deep and shallow notches.

***Key Words***: Fatigue, Stress Concentration, Notch, Numerical Analysis, Test Specimen, Torsion, Body Force Method

## 1. 緒　言

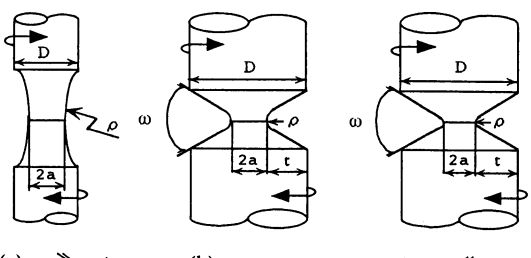
円周切欠きを有する丸棒はしばしば試験片として用いられ，その応力集中問題は材料強度に関する研究において重要である．著者らは丸棒が，引張りおよび曲げを受ける場合について，切欠きが深い場合の解や浅い場合の解を有効に利用し，切欠き半径ρが極端に大きい円弧切欠き［図1(a)］や切欠き半径ρが極端に小さい鋭い切欠き［図1(c)］をも含めた，切欠き寸法のすべての範囲に対して応力集中係数を正確に与える計算式を提案した(1),(2)．図1の形状は引張りや回転曲げのみならずねじり疲労試験においてもよく用いられている．しかし，ねじりの場合では切欠き寸法のすべての範囲に対して正確な応力集中係数を求める計算式は提案されていない．

そこで本研究では，丸棒引張り問題や丸棒曲げ問題と同様に，丸棒ねじり問題において，切欠きが浅い場合や深い場合の厳密解ならびに体積力法によって得られた解析結果を基に物理的考察を行い，開き角$\omega=60°$における切欠き形状の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える高精度の計算式を提案することを目的とする．ねじりでは，深い場合の解や浅い場合による近似が引張りや曲げと大きく異なるので工夫が必要である．また，開き角の応力集中に及ぼす影響に関しても，切欠きが浅い場合と深い場合の両極限を中心として考察する．

## 2. 記　号

本論文で使用する記号をまとめて以下に示す．全範囲で求める応力集中係数$K_t$は最小断面の公称応力に基づく．

$\rho$ ： 切欠き半径
$t$ ： 切欠き深さ
$a$ ： 切欠き底の最小断面の半径
$D$ ： 直径




(a) $\rho \gg a, t$　　(b) $\rho \fallingdotseq a, t$　　(c) $\rho \ll a, t$

**Fig.1 Round specimens with circular-arc and V-shaped notch.**
**(a)extremely blunt notch.**
**(b)ordinary notch.**
**(c)extremely sharp notch.**

---

* 原稿受付　2003年3月17日.
*1 正員，九州工業大学工学部(〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1).
*2 九州工業大学工学部.
E-mail : noda@mech.kyutech.ac.jp

$d$　：　最小断面の直径，$d = 2a$

$\xi$　：　$= \sqrt{t/\rho}$

$\eta$　：　$= \sqrt{\rho/t}$

$\lambda$　：　$= 2t/D$

$x$　：　$a/\rho \le 1.0$のとき，$x = a/\rho$

　　　$\rho/a \le 1.0$のとき，$x = 2 - \rho/a$

$K_t$　：　図 1 (a)~(c)の問題の応力集中係数

$K_{ts}$　：　60°V形切欠きを有する半無限板の応力集中係数

$K_{tH}$　：　深い回転双曲面切欠きの応力集中係数 [3]

$$K_{tH} = 3(1+\sqrt{a/\rho+1})^2/4(1+2\sqrt{a/\rho+1})$$

$K_{td}$　：　深い60°V形切欠きの応力集中係数

$\omega$　：　切欠きの開き角(degree)

$M_1$　：　体積力法による解析の際の切欠きの円弧部の分割数

$M_2$　：　体積力法による解析の際の切欠きの直線部の分割数

Table 1　$K_{ts}/K_{tE}$　for various $\omega$　[ $K_{ts} = K_t|_{2t/D\to 0}$, $K_{ts} = 1+\sqrt{t/\rho}$ ]

| $t/\rho$ | $\sqrt{t/\rho}$ | $\omega = 0°$ | $\omega = 40°$ | $\omega = 60°$ | $\omega = 70°$ | $\omega = 80°$ | $\omega = 90$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.05 | 0.224 | 0.986 | 0.986 | 0.986 | 0.986 | 0.986 | 0.986 |
| 0.0625 | 0.25 | 0.986 | 0.986 | 0.986 | 0.986 | 0.986 | 0.986 |
| 0.10 | 0.316 | 0.984 | 0.984 | 0.984 | 0.984 | 0.984 | 0.984 |
| 0.20 | 0.447 | 0.983 | 0.983 | 0.983 | 0.983 | 0.983 | 0.983 |
| 0.25 | 0.5 | 0.984 | 0.984 | 0.984 | 0.984 | 0.984 | 0.984 |
| 0.30 | 0.548 | 0.984 | 0.984 | 0.984 | 0.984 | 0.984 | 0.984 |
| 0.40 | 0.632 | 0.987 | 0.987 | 0.987 | 0.987 | 0.987 | 0.987 |
| 0.50 | 0.707 | 0.988 | 0.988 | 0.988 | 0.988 | 0.988 | 0.988 |
| 0.60 | 0.775 | 0.990 | 0.990 | 0.990 | 0.990 | 0.990 | 0.990 |
| 0.70 | 0.837 | 0.993 | 0.993 | 0.993 | 0.993 | 0.993 | 0.993 |
| 0.80 | 0.894 | 0.996 | 0.996 | 0.996 | 0.996 | 0.996 | 0.996 |
| 0.90 | 0.949 | 0.997 | 0.997 | 0.997 | 0.997 | 0.997 | 0.997 |
| 1.0 | 1.0 | 1.000 | 1.000 | 0.999 | 0.999 | 0.997 | 0.994 |
| 1.111 | 1.054 | - | - | 1.002 | - | - | - |
| 1.25 | 1.118 | - | - | 1.004 | - | - | - |
| 1.428 | 1.195 | - | - | 1.007 | - | - | - |
| 1.666 | 1.291 | - | - | 1.011 | - | - | - |
| 2 | 1.414 | 1.022 | 1.019 | 1.014 | 1.011 | 1.005 | 0.995 |
| 4 | 2 | 1.055 | 1.043 | 1.028 | 1.018 | 1.004 | 0.985 |
| 8 | 2.828 | 1.095 | 1.064 | 1.034 | 1.014 | 0.990 | 0.960 |
| 16 | 4 | 1.138 | 1.078 | 1.029 | 0.998 | 0.961 | 0.919 |
| 36 | 6 | 1.186 | 1.082 | 1.008 | 0.962 | 0.912 | 0.857 |
| 64 | 8 | 1.214 | 1.077 | 0.983 | 0.928 | 0.870 | 0.806 |
| 100 | 10 | 1.236 | 1.068 | 0.964 | 0.899 | 0.834 | 0.764 |
| 225 | 15 | 1.269 | 1.044 | 0.919 | 0.840 | 0.768 | 0.688 |
| 400 | 20 | 1.286 | 1.022 | 0.905 | 0.795 | 0.719 | 0.619 |
| 900 | 30 | - | - | 0.821 | - | - | - |
| 1600 | 40 | - | - | 0.780 | - | - | - |
| 2500 | 50 | - | - | 0.753 | - | - | - |
| ∞ | | | | 0.705 | | | |

Table 2 Convergence of $K_{ts}$.

| $t/\rho = 64$ | | | $t/\rho = 1600$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | $M_2$ | $\omega = 90°$ | $M_1$ | $M_2$ | $\omega = 60°$ |
| 64 | 400 | 7.2520 | 30 | 1500 | 31.8686 |
| 68 | 432 | 7.2522 | 31 | 1550 | 31.8728 |
| 72 | 464 | 7.2524 | 32 | 1600 | 31.8764 |
| 76 | 496 | 7.2525 | 33 | 1650 | 31.8797 |
| $\to\infty$ (68-64) | | 7.2556 | $\to\infty$ (31-30) | | 31.9976 |
| $\to\infty$ (72-68) | | 7.2552 | $\to\infty$ (32-31) | | 31.9905 |
| $\to\infty$ (76-72) | | 7.2547 | $\to\infty$ (33-32) | | 31.9803 |
| $K_{tE}$ | | 9 | $K_{tE}$ | | 41 |

## 3. 浅い切欠きの解や深い切欠きの解における切欠きの開き角の影響

**3．1　浅い切欠きの解$K_{ts}$**　まず，切欠き深さが浅い場合の極限に相当するV形切欠きを有する半無限板の応力集中係数$K_{ts} = K_t|_{2t/D\to 0}$を考察する．さきの引張り及び曲げの問題でこの極限の解は，切欠き半径$\rho$が小さい場合や切欠き深さ$t$が浅い場合に有効であることを示した[1),(2),(4)]．開き角$\omega$を変化させて体積力法による計算を行って得られた結果を表1に示す．表1の結果は有限の分割数から分割数無限大の場合を外そうによって求めている．その例を表2に示す．表2は開き角$\omega = 60°, 90°$での$K_{ts}$の値を$t/\rho = 64, 1600$の場合について示している．表2のような検討によって表1は有効数字4桁程度の精度があると考えられる．表1に示すように，$t/\rho < 1.0$では開き角の影響がほとんど表われず，$\omega = 0° \sim 90°$の結果は有効数字3桁程度まで一致する．しかし，$t/\rho > 1.0$では$\rho \to 0$に従って開き角の影響は大き

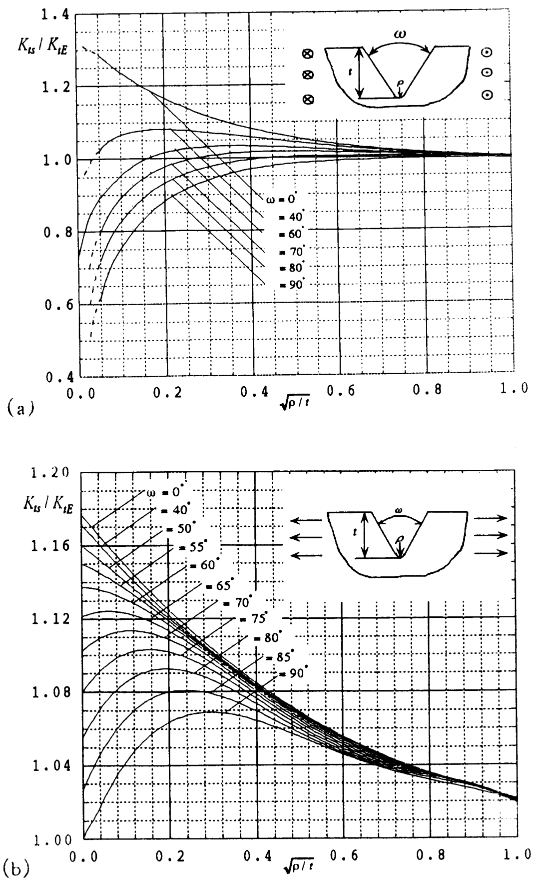



Fig.2　$K_{ts}/K_{tE}$ vs $\sqrt{\rho/t}$ for (a)torsion and (b)tennsion.

く表われる．すなわち，$\omega=90^\circ\to0^\circ$に従って$K_{ts}$が大となる．表1で$t/\rho=\infty$の結果は$t/\rho$が大きいときの結果から外そうによって求めたものである．表１の結果を図２(a)に示す．ここで，比較のため引張りの場合も示した［図２(b)］．例えば，$t/\rho=400$でねじりでは$\omega=0^\circ$と$\omega=90^\circ$はその値が２倍程度異なるのに対して引張りでの違いは17%である．結局，$\rho$が小さい浅い切欠きのねじりの場合には，引張りの場合より開き角$\omega$の影響がはるかに大きいことがわかる．等価だ円の考え方より引張りでもねじりでも$\rho$と$t$を固定すれば，開き角の影響は$\omega=0^\circ\sim90^\circ$程度ではさほど大きくないと考えられているようであるが，注意が必要である．

**３．２　深い切欠きの解$K_{td}$**　次に，切欠きが深い場合に対する応力集中係数$K_{td}=K_t|_{2t/D\to1}$を考察する．さきにこのような60°V形切欠きの引張りと曲げに対して回転双曲面切欠きの解が，その近似値を与えることを示した(1),(2),(5)．そこで，開き角$\omega=0^\circ\sim90^\circ$の場合のねじりについて，切欠きが深くなったときの極限の解$K_{td}$を以下のようにして求める．まず，表３に$\omega=60^\circ$で切欠きが深い場合の体積力法による計算例を示す．表３では有効数字４桁程度の精度があることがわかる．表４に表３のようにして求めた$\omega=60^\circ$での$K_t/K_{tH}$の値を$2t/D=0.7\sim0.9$について示す．また，収束性を利用して$2t/D\to1$の推定値も示す．表４に示すように，切欠きが深い場合すなわち$2t/D=0.7,0.8,0.9$の応力集中係数$K_t$と深い双曲面切欠きの解$K_{tH}$を比較すると$2t/D=0.7\to0.9$と切欠きが深くなるに従い応力集中係数$K_t$と深い双曲面切欠きの解$K_{tH}$との比は一定になる．同様にして，深いV形切欠きの解$K_{td}$を開き角$\omega=0^\circ\sim90^\circ$の場合についてパラメータxの関数として求め，表５に示す．図３は表５の結果を図示したものである．$\rho\to0$となるにつれて$\omega=0^\circ$と$\omega=90^\circ$で違いはやや大きくなり，7%程度の違いとなる．前報の引張り(6)では$\rho\to0$で$\omega=0^\circ$と$\omega=90^\circ$の結果に5%の差が認められたが，開き角の影響はそれほどねじりでも大きくないことがわか

Table 3 Convergence of $K_t$ when $\omega=60^\circ$ under torsion.

| | | $a/\rho=1.0$ | $a/\rho=1.0$ | $a/\rho=1.0$ |
|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | $M_2$ | 2t/D=0.7 | 2t/D=0.8 | 2t/D=0.9 |
| 10 | 30 | 1.14779 | 1.14795 | 1.14798 |
| 15 | 45 | 1.14786 | 1.14802 | 1.14806 |
| 20 | 60 | 1.14789 | 1.14804 | 1.14809 |
| →∞ (15-10) | | 1.14801 | 1.14817 | 1.14822 |
| →∞ (20-15) | | 1.14796 | 1.14812 | 1.14817 |
| $K_{tH}$ | | 1.142 | 1.142 | 1.142 |

Table 4 $K_t/K_{tH}$ when $2t/D\to1.0$ and $\omega=60^\circ$ under torsion.

| | $a/\rho$ | $\rho/a$ | 2t/D=0.7 | 2t/D=0.8 | 2t/D=0.9 | 2t/D→1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.000 | 0.000 | ∞ | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 0.100 | 0.100 | 10.00 | 1.000 | 1.000 | 1.001 | 1.001 |
| 0.200 | 0.200 | 5.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 0.300 | 0.300 | 3.333 | 1.001 | 1.001 | 1.001 | 1.001 |
| 0.400 | 0.400 | 2.500 | 1.001 | 1.001 | 1.001 | 1.001 |
| 0.500 | 0.500 | 2.000 | 1.002 | 1.002 | 1.002 | 1.002 |
| 0.600 | 0.600 | 1.667 | 1.003 | 1.003 | 1.003 | 1.003 |
| 0.700 | 0.700 | 1.429 | 1.004 | 1.004 | 1.004 | 1.004 |
| 0.800 | 0.800 | 1.250 | 1.004 | 1.004 | 1.004 | 1.004 |
| 0.900 | 0.900 | 1.111 | 1.005 | 1.005 | 1.004 | 1.004 |
| 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.005 | 1.005 | 1.005 | 1.005 |
| 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.005 | 1.005 | 1.005 | 1.005 |
| 1.100 | 1.111 | 0.900 | 1.007 | 1.007 | 1.007 | 1.007 |
| 1.200 | 1.250 | 0.800 | 1.007 | 1.008 | 1.008 | 1.008 |
| 1.300 | 1.429 | 0.700 | 1.009 | 1.009 | 1.009 | 1.009 |
| 1.400 | 1.667 | 0.600 | 1.011 | 1.011 | 1.011 | 1.011 |
| 1.500 | 2.000 | 0.500 | 1.014 | 1.014 | 1.014 | 1.014 |
| 1.600 | 2.500 | 0.400 | 1.017 | 1.017 | 1.018 | 1.018 |
| 1.700 | 3.333 | 0.300 | 1.022 | 1.023 | 1.024 | 1.024 |
| 1.800 | 5.000 | 0.200 | 1.030 | 1.031 | | 1.031 |
| 1.900 | 10.00 | 0.100 | 1.042 | | | 1.042 |
| 2.000 | ∞ | 0.000 | | | | 1.052 |

Table 5 $K_t/K_{tH}$ for various $\omega$ when $2t/D\to1.0$ under torsion.

| $x$ | $a/\rho$ | $\rho/a$ | $\omega=0^\circ$ | $\omega=60^\circ$ | $\omega=90^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.000 | 0.000 | ∞ | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 0.100 | 0.100 | 10.00 | 1.001 | 1.001 | 1.001 |
| 0.200 | 0.200 | 5.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 0.300 | 0.300 | 3.333 | 1.001 | 1.001 | 1.001 |
| 0.400 | 0.400 | 2.500 | 1.001 | 1.001 | 1.001 |
| 0.500 | 0.500 | 2.000 | 1.002 | 1.002 | 1.002 |
| 0.600 | 0.600 | 1.667 | 1.003 | 1.003 | 1.003 |
| 0.700 | 0.700 | 1.429 | 1.004 | 1.004 | 1.004 |
| 0.800 | 0.800 | 1.250 | 1.004 | 1.004 | 1.004 |
| 0.900 | 0.900 | 1.111 | 1.005 | 1.004 | 1.005 |
| 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.005 | 1.005 | 1.005 |
| 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.005 | 1.005 | 1.005 |
| 1.100 | 1.111 | 0.900 | 1.007 | 1.007 | 1.006 |
| 1.200 | 1.250 | 0.800 | 1.008 | 1.008 | 1.007 |
| 1.300 | 1.429 | 0.700 | 1.009 | 1.009 | 1.008 |
| 1.400 | 1.667 | 0.600 | 1.011 | 1.011 | 1.010 |
| 1.500 | 2.000 | 0.500 | 1.014 | 1.014 | 1.011 |
| 1.600 | 2.500 | 0.400 | 1.018 | 1.018 | 1.014 |
| 1.700 | 3.333 | 0.300 | 1.027 | 1.024 | 1.017 |
| 1.800 | 5.000 | 0.200 | 1.040 | 1.031 | 1.017 |
| 1.900 | 10.00 | 0.100 | 1.081 | 1.042 | 1.018 |
| 2.000 | ∞ | 0.000 | 1.090 | 1.052 | 1.019 |

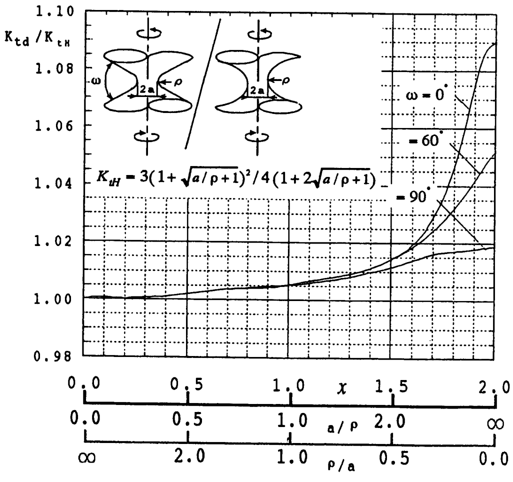



Fig.3 $K_{td}/K_{tH}$ vs. $a/\rho$ or $\rho/a$ under torsion.

る．結局，ねじりでは切欠きが深い場合には開き角の影響は小さいが，浅い場合では開き角の影響が大きいので，切欠きの開き角の影響を考慮した切欠きの任意寸法に対する計算式[5]を提案することは難しい．よって，以下ではまず，$\omega=60°$と固定した場合の切欠き寸法の全範囲に対する評価式を考察する．その際，まず図2と図3の開き角$\omega=60°$の結果に最小二乗法を適用し，切欠きが浅い場合の解と切欠きが深い場合の解をそれぞれ$\sqrt{t/\rho}$と$a/\rho$の全範囲で求める．そして，さきの研究で求めた図1の問題の$2\rho/D\geqq 0.03$に対して提案した近似式[7]の結果を図示し（図4～図7の実線），また一部については体積力法の追加計算を行って考察する（図4～図7の破線）．その際切欠き深さのパラメータとしては主に$2t/D$を用い，切り欠き半径のパラメータとして主に$a/\rho$（または$\rho/a$）を用いて整理する．

## 4．鋭い切欠きまたは浅い切欠きの応力集中係数

まず，切欠き半径$\rho$が小さい図1(c)のような60°V形切欠きに対する応力集中係数$K_t$を考察する．このような鋭い切欠きの応力集中係数は，同一形状比$t/\rho$のV形切欠きを有する半無限板の応力集中係数$K_{ts}$より求めることができる．図4は，応力集中係数$K_t$と60°V形切欠きを有する半無限板の応力集中係数の解$K_{ts}$との比を切欠き形状の広い範囲（$0<\rho/a\leq 10$）について示したものである［図4(a)］．ここで，参考のため引張りの場合も示した［図4(b)］．なお，図4(a)で$\rho/a\to 0$の線は著者らがさきに求めた鋭い切欠きの値[8]である．

図4よりねじりの場合［図4(a)］の$K_t/K_{ts}$の値は，引張りの場合［図4(b)］ほど揃ってないことがわかる．従って，$K_{ts}$を用いる計算式の適用範囲が，引張りの場合よりも限定されることになる．結局，図4(a)に示すような$K_t/K_{ts}$の値の検討から，以下のことがわかる．

(1) 鋭い切欠き（$\rho/a=0.05$）では，$K_t/K_{ts}$の値は$2t/D$のみでは決まらないが，$\rho/a=0.05$と$\rho/a\to 0$から間の値を推測すれば，$K_t$を求めることができる．

(2) 浅い切欠き（$2t/D\leqq 0.02$）では，$\rho$が極端に大きい場合（$a/\rho\leqq 0.01$）を除き$K_t/K_{ts}$の値はほぼ$2t/D$によって決まる狭い範囲に分布する．例えば，$2t/D=0.02$のとき，$K_t/K_{ts}$の実際の数値は$a/\rho=0.01$ならば$K_t/K_{ts}=0.989$であり，$a/\rho\to\infty$でも$K_t/K_{ts}=0.956$であり，比較的狭い範囲に分布している．従って$K_t/K_{ts}$のこのような性質を利用すれば，浅い切欠きの$K_t$を求めることができる．

(3) 浅い切欠きで，$\rho$が極端に大きい場合（$2t/D\leqq 0.02$かつ$a/\rho\leqq 0.01$）では，次節で鈍い切欠きの応力集中係数を考察した結果，$K_t=(1.000\sim 1.002)$と見積もることができる．よってこの場合$K_t\fallingdotseq 1.001$として十分精度よく評価できる．

## 5．鈍い切欠きまたは深い切欠きの応力集中係数

ここでは，切欠き半径が大きいかまたは深い切欠きに対する応力集中係数を考察する．このような切欠きに対して切欠きの深い場合に相当する回転双曲面切欠きの解が，有限深さの切欠き問題に対して広い範囲で有効（すなわち$K_t/K_{tH}\fallingdotseq 1$）であることは，引張りについての論文[1]より明らかである．そこで本論文では，ねじりについても同様に，切欠きが深い場合の応力集中係数をさらに精度良く求めることを試みる．図5は，切欠きが深い場合の応力集中係数$K_t$［図5(a)］が$K_{td}$［図5(b)］の値で近似できることを示している．

次に，$K_t$と式(3)より求めた$K_{td}$との比で整理した結果を図6に示す．ここで，ねじりの場合［図6(a)］と引張

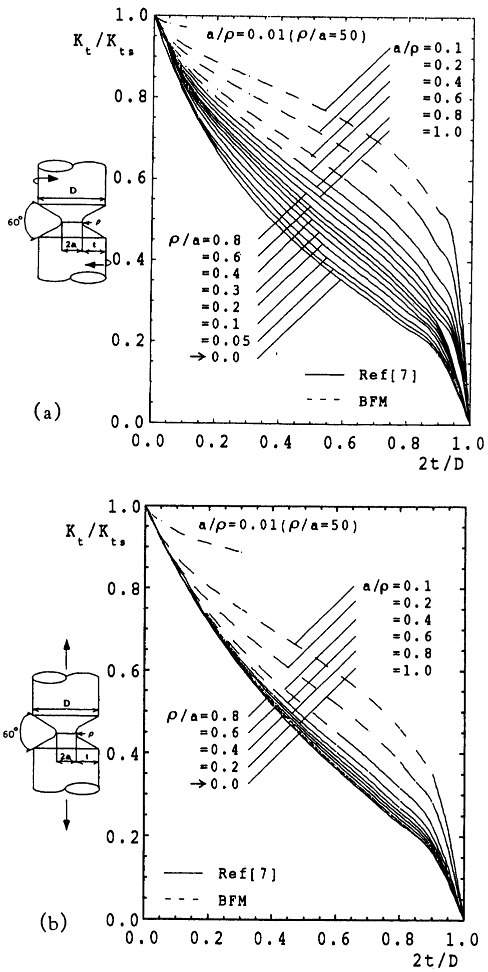
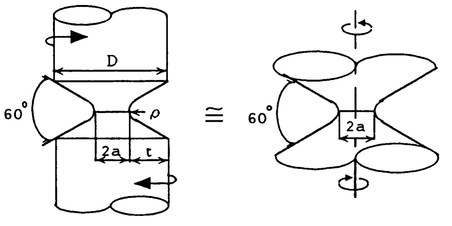


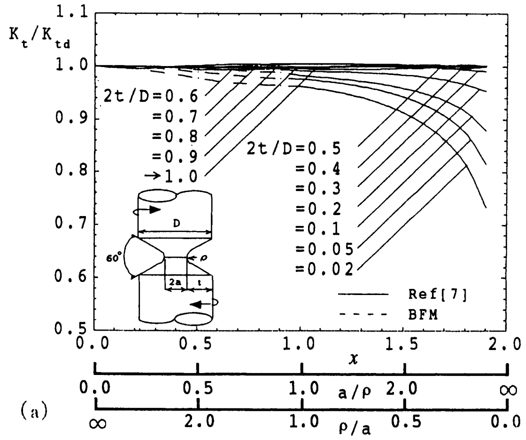

Fig.4 $K_t/K_{ts}$ vs. 2t/D for (a)torsion and (b)tension.

りの場合［図6(b)］について比較，検討する．それによるとねじりの場合［図6(a)］での$K_t/K_{td}$の値は引張りの場合［図6(b)］よりもかなり揃っていることがわかる．これは，$K_{td}$についての近似が，引張りの場合よりも広範囲にわたって利用できることを示している．結局，図6(a)に示すような$K_t/K_{td}$の値の検討から，以下に示す範囲で$K_{td}$による近似が有効であることがわかる．

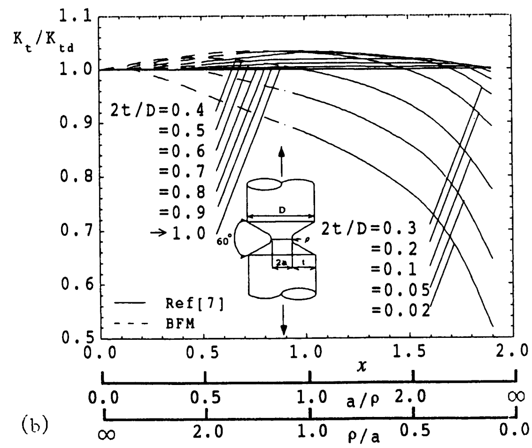



(a) $2t/D \geqq 0.7$　　(b)

Fig.5 $K_t$ and $K_{td}$ with V-shaped notches.




(a)




(b)

Fig.6 $K_t/K_{td}$ vs. $a/\rho$ or $\rho/a$ for (a)torsion and (b)tension.

(1) $2t/D \geqq 0.4$ で $20 \leqq a/\rho \leqq \infty$ の範囲で

$0.985 \leqq K_t/K_{td} \leqq 1.001$

(2) $0.2 \leqq 2t/D \leqq 1.0$ で $0 \leqq a/\rho \leqq 20$ の範囲で

$0.984 \leqq K_t/K_{td} \leqq 1.006$

(3) $0.02 \leqq 2t/D \leqq 0.2$ で $0 \leqq a/\rho \leqq 2.0$ の範囲で

$0.912 \leqq K_t/K_{td} \leqq 1.000$

## 6．その他の切欠きの応力集中係数

ここでは，前節まで示してない範囲（$0.05 \leqq \rho/a \leqq 0.5$，$0.02 \leqq 2t/D \leqq 0.2$）の応力集中係数の評価方法を提案する．図4よりこのような範囲では，$K_t/K_{ts}$の値がほぼ$2t/D$のみによってきまり，狭い範囲に存在していることがわかる．そこで，高精度の近似式を作るため，$[K_t/K_{ts}]_{\rho/a=0.2}$の値を基準にして$K_t/K_{ts}$との比をとる．その結果を図7に示す．図7より$[K_t/K_{ts}]_{\rho/a=0.2}$と$K_t/K_{ts}$の比は$0 \leqq 2t/D \leqq 0.2$の範囲で（0.96～1.05）の狭い範囲にあることがわかる．

## 7．切欠き形状の全範囲に対して応力集中係数を与える計算式

以上の議論から，切欠き形状の全範囲に対して応力集中係数を与えるためその領域を7つに分けたものを図8に示す．そして必要となる線図と近似式をまとめて以下に記す．

**7・1　半無限板の60°V形切欠きまたは円弧形状切欠きの$K_{ts}$**（図1で$\rho$，$t$が有限で$d$，$D\to\infty$のとき$K_t\to K_{ts}$）

(1) $0 \leq \xi \leq 1.0$

$$K_{ts}/K_{tE}=1.000-0.089464\xi+0.13872\xi^2-0.050088\xi^3 \quad \cdots\cdots(1.a)$$

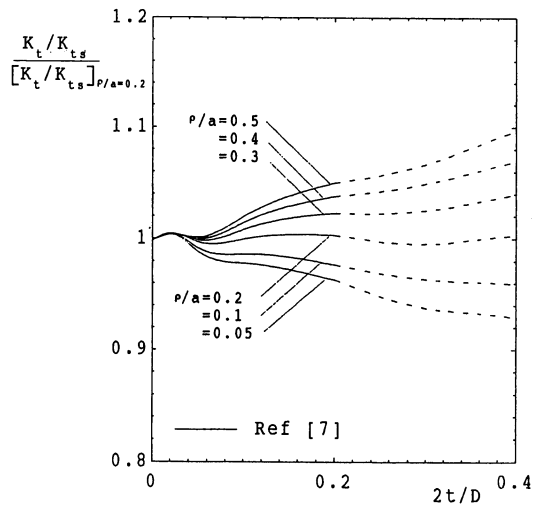



Fig.7 $(K_t/K_{ts})/([K_t/K_{ts}]_{\rho/a=0.2})$ vs. 2t/D.

(2) $0 \leq \eta \leq 0.05$

$$K_{ts}/K_{tE} = 0.70516 - 0.77340\eta + 200.235\eta^2 - 2106.840\eta^3 \quad \cdots\cdots (1.b)$$

(3) $0.05 < \eta < 1.0$

$$K_{ts}/K_{tE} = 0.81595 + 2.0675\eta - 7.2824\eta^2 + 12.045\eta^3 - 9.6241\eta^4 + 2.9783\eta^5 \quad \cdots\cdots (1.c)$$

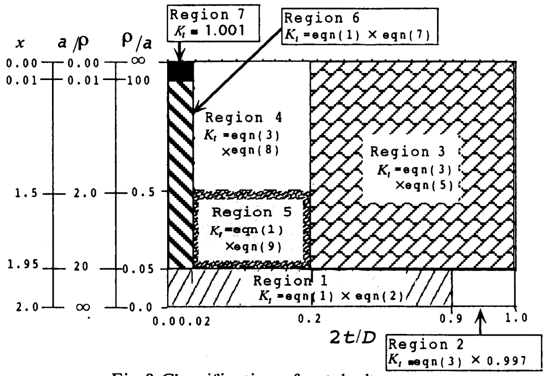



Fig.8 Classification of notch shape
Region 1: Sharp and Shallow notch
Region 2: Sharp and Deep notch
Region 3: Deep notch
Region 4: Blunt notch
Region 5: Ordinary notch
Region 6: Shallow notch
Region 7: Blunt and Shallow notch

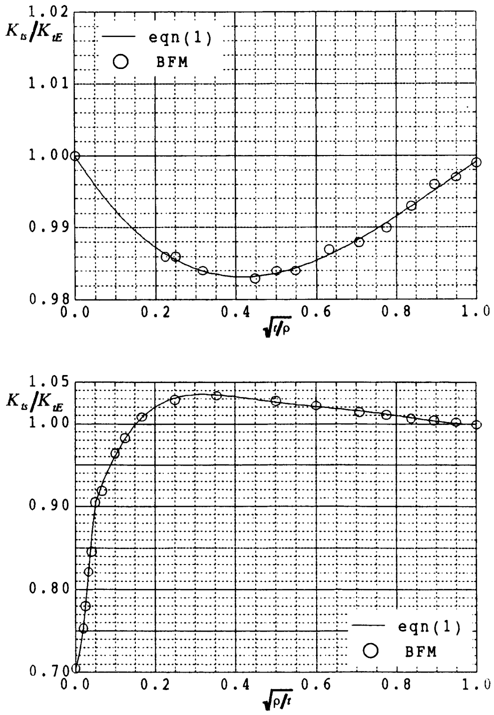



Fig.9 $K_{ts}/K_{tE}$ vs $\sqrt{t/\rho}$ and $\sqrt{\rho/t}$.

$$\xi = \sqrt{t/\rho},\ \eta = \sqrt{\rho/t},\ K_{tE} = 1 + \sqrt{t/\rho} \quad \cdots\cdots (1.d)$$

図９に，式（１）の$K_{ts}/K_{tE}$の値を図示する．

**7・2　鋭い切欠きの$K_t$**(図８の領域１：$\rho/a \leqq 0.05$ かつ $2t/D \leqq 0.4$)

$$\begin{aligned}
K_t/K_{ts} = {} & 1.0002 + 0.065000(\rho/a) - 0.46000(\rho/a)^2 \\
& + \{-2.3204 + 41.027(\rho/a) - 272.908(\rho/a)^2\}\lambda \\
& + \{4.9383 - 1051.719(\rho/a) + 7281.060(\rho/a)^2\}\lambda^2 \\
& + \{-14.354 + 9977.270(\rho/a) - 69683.800(\rho/a)^2\}\lambda^3 \\
& + \{57.094 - 47562.010(\rho/a) + 334477.80(\rho/a)^2\}\lambda^4 \\
& + \{-189.604 + 128887.31(\rho/a) - 911641.40(\rho/a)^2\}\lambda^5 \\
& + \{398.124 - 207815.03(\rho/a) + 1476793.4(\rho/a)^2\}\lambda^6 \\
& + \{-487.188 + 197560.60(\rho/a) - 1409226.4(\rho/a)^2\}\lambda^7 \\
& + \{317.414 - 102277.81(\rho/a) + 731834.20(\rho/a)^2\}\lambda^8 \\
& + \{-85.103 + 22240.230(\rho/a) - 159561.00(\rho/a)^2\}\lambda^9
\end{aligned} \quad \cdots\cdots (2)$$

図１０に，式（２）の$K_t/K_{ts}$の値を図示する．

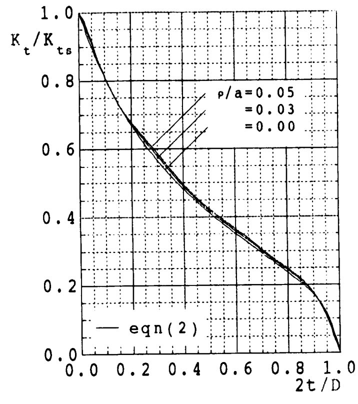



Fig.10　$K_t/K_{ts}$ vs. 2t/D.

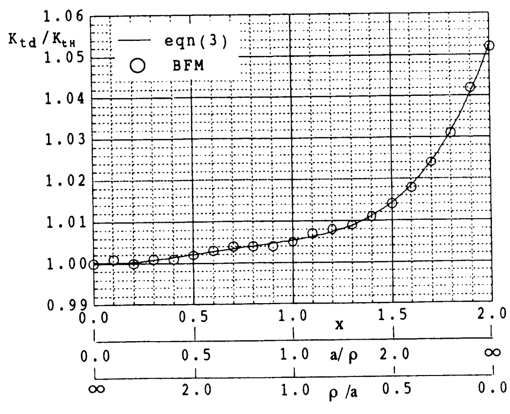



Fig.11　$K_t/K_{td}$ vs. $a/\rho$ or $\rho/a$.

**7・3　深い60°V形切欠きの$K_t$**(図1で$a$，ρが有限で$t\to\infty$のとき$K_t\to K_{td}$)

$$K_{td}/K_{tH} = 1.0004 - 0.0054166x + 0.031712x^2 - 0.034608x^3 + 0.013315x^4 \quad \cdots\cdots(3)$$

図11は，式（3）の$K_{td}/K_{tH}$の値を図示したものである．

**7・4　鋭く深い切欠きの$K_t$**(図9の領域2：$\rho/a \leqq 0.05$かつ$2t/D \geqq 0.9$)

$$K_t/K_{td} \fallingdotseq 0.997 \quad \cdots\cdots(4)$$

**7・5　深い切欠きの$K_t$**[図8の領域3：$2t/D \geqq 0.2$かつ$a/\rho \leqq 20$($0 \leqq x \leqq 1.95$)]

$$\begin{aligned}K_t/K_{td} = &(1.2732 - 5.2256\lambda + 41.037\lambda^2 - 173.861\lambda^3 + 436.177\lambda^4\\ &-666.588\lambda^5 + 609.405\lambda^6 - 306.425\lambda^7 + 65.207\lambda^8)\\ &+(-3.9187 + 74.205\lambda - 573.456\lambda^2 + 2380.186\lambda^3 - 5824.853\lambda^4\\ &+8649.916\lambda^5 - 7658.407\lambda^6 + 3718.693\lambda^7 - 762.3645\lambda^8)x\\ &+(11.100 - 210.828\lambda + 1633.779\lambda^2 - 6808.307\lambda^3 + 16762.089\lambda^4\\ &-25112.854\lambda^5 + 22504.266\lambda^6 - 11095.586\lambda^7 + 2316.340\lambda^8)x^2\\ &+(-10.339 + 196.614\lambda - 1527.889\lambda^2 + 6393.566\lambda^3 - 15824.185\lambda^4\\ &+23855.548\lambda^5 - 21525.758\lambda^6 + 10690.755\lambda^7 - 2248.312\lambda^8)x^3\\ &+(2.9974 - 57.230\lambda + 445.993\lambda^2 - 1871.177\lambda^3 + 4643.677\lambda^4\\ &-7020.090\lambda^5 + 6351.932\lambda^6 - 3462.667\lambda^7 + 666.564\lambda^8)x^4\end{aligned} \quad \cdots\cdots(5)$$

**7・6　鈍く浅い切欠きの$K_t$**(図8の領域7：$a/\rho \leqq 0.01$かつ$2t/D \leqq 0.02$)

$$K_t \fallingdotseq 1.001 \quad \cdots\cdots(6)$$

**7・7　浅い切欠きの$K_t$**[図8の領域6：$0.01 \leqq a/\rho \leqq 20$($0.01 \leqq x \leqq 1.95$)かつ$2t/D \leqq 0.02$]

$$K_t/K_{ts} = 1.000 - (1.0552 + 1.8464x + 1.9736x^2 - 8.2590x^3 + 6.1096x^4 - 1.3570x^5) \quad \cdots\cdots(7)$$

**7・8　鈍い切欠きの$K_t$**[図8の領域4：$a/\rho \leqq 2.0$($0 \leqq x \leqq 1.5$)かつ$0.02 \leqq 2t/D \leqq 0.2$]

$$\begin{aligned}K_t/K_{td} = &(1.0016 - 0.070219\lambda + 0.77019\lambda^2 - 2.3148\lambda^3)\\ &+(-0.040827 + 2.2659\lambda - 26.359\lambda^2 + 80.467\lambda^3)x\\ &+(-0.14433 - 1.7471\lambda + 46.228\lambda^2 - 169.806\lambda^3)x^2\\ &+(0.22594 + 0.033869\lambda - 36.720\lambda^2 + 153.290\lambda^3)x^3\\ &+(-0.098744 + 0.48288\lambda + 8.4604\lambda^2 - 41.490\lambda^3)x^4\end{aligned} \quad \cdots\cdots(8)$$

**7・8　その他の切欠きの$K_t$**[図8の領域5：$0.05 \leqq \rho/a \leqq 0.5$($1.5 \leqq x \leqq 1.95$)かつ$0.02 \leqq 2t/D \leqq 0.2$]

$$\begin{aligned}K_t/K_{ts} = &\{(1.0005 + 0.0051162(\rho/a) - 0.11705(\rho/a)^2\\ &+0.60862(\rho/a)^3 - 1.2770(\rho/a)^4 + 0.95132(\rho/a)^5)\\ &+(0.046366 - 2.8738(\rho/a) + 41.066(\rho/a)^2\\ &-206.252(\rho/a)^3 + 423.882(\rho/a)^4 - 309.132(\rho/a)^5)\lambda\\ &+(-5.7618 + 64.791(\rho/a) - 516.761(\rho/a)^2\\ &+2384.219(\rho/a)^3 - 4832.939(\rho/a)^4 + 3527.542(\rho/a)^5)\lambda^2\\ &+(21.719 - 235.937(\rho/a) + 1785.138(\rho/a)^2\\ &-7871.300(\rho/a)^3 + 15633.377(\rho/a)^4 - 11306.862(\rho/a)^5)\lambda^3\}\\ &([K_t/K_{ts}]_{\rho/a=0.2})\end{aligned} \quad \cdots\cdots(9.a)$$

$$\begin{aligned}[K_t/K_{ts}]_{\rho/a=0.2} = &1.0019 - 0.96607\lambda - 23.944\lambda^2 + 254.767\lambda^3\\ &-1220.738\lambda^4 + 3272.556\lambda^5 - 5196.867\lambda^6\\ &+4851.327\lambda^7 - 2457.932\lambda^8 + 520.795\lambda^9\end{aligned} \quad \cdots\cdots(9.b)$$

以上の式および線図を利用することにより全範囲の応力集中係数が求まる．

## 8．切欠きの寸法の全範囲に対する近似式

以上を示した式（1）～（9）で切欠きの寸法の全範囲に対して応力集中係数が与えられた．但し，それらの式はそれぞれの切欠き寸法の範囲のみで有効であり，やや不便である．そこで本研究では，式（1）～（9）から得られる値をさきに提案した修正ノイバーの三角則$K_{tN}$[(7)]との比で整理する．

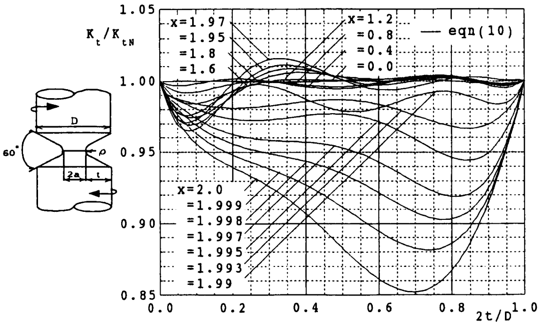



Fig.12　$K_t/K_{tN}$ vs. 2t/D.

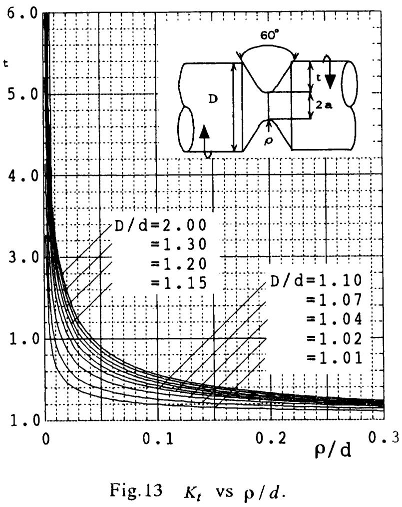



Fig.13　$K_t$ vs $\rho/d$.

$$K_{tN} = \left\{(K_{ts}-1)(K_{td}-1)/\left((K_{ts}-1)^{2.6}+(K_{td}-1)^{2.6}\right)^{1/2.6}\right\}+1$$

そしてに最小二乗法を適用することによって寸法の全範囲に対して誤差１％以内を目標とする簡便な近似式を以下のように得た．

(1) $0 < x \le 1.95$

$$\begin{aligned}K_t/K_{tN} = {} & 0.99999 - 0.0026822x + 0.0053295x^2 - 0.0016953x^3\\ & + (0.0026579 - 0.32756x + 0.031522x^2 - 0.081859x^3)\lambda\\ & + (-0.0076275 + 6.1229x - 4.8157x^2 + 2.3235x^3)\lambda^2\\ & + (-0.23987 - 30.899x + 30.141x^2 - 12.484x^3)\lambda^3\\ & + (1.0501 + 63.622x - 66.952x^2 + 26.072x^3)\lambda^4\\ & + (-1.4274 - 57.780x + 63.046x^2 - 23.742x^3)\lambda^5\\ & + (0.62212 + 19.268x - 21.460x^2 + 7.9153x^3)\lambda^6\end{aligned} \quad \cdots\cdots(10.a)$$

(2) $1.95 < x \le 1.99$

$$\begin{aligned}K_t/K_{tN} = {} & 1.0025 - 0.0093115A - 0.0058186A^2 + 0.025526A^3\\ & + (-1.1232 + 0.77408A + 0.76457A^2 - 1.5432A^3)\lambda\\ & + (10.849 - 5.3371A - 6.5696A^2 + 12.729A^3)\lambda^2\\ & + (-38.451 + 23.186A + 9.7978A^2 - 98.794A^3)\lambda^3\\ & + (63.849 - 53.490A + 9.3650A^2 + 285.633A^3)\lambda^4\\ & + (-50.412 + 56.678A - 27.335A^2 - 328.903A^3)\lambda^5\\ & + (15.286 - 21.788A + 13.972A^2 + 130.778A^3)\lambda^6\end{aligned} \quad \cdots\cdots(10.b)$$

$$A = 10(x - 1.95) \quad \cdots\cdots(10.c)$$

(3) $1.99 < x \le 2.0$

$$\begin{aligned}K_t/K_{tN} = {} & 0.99192 + 0.00011120B + 0.0033482B^2 + 0.0013571B^3\\ & + (-0.18992 + 0.41943B - 0.32590B^2 - 0.54245B^3)\lambda\\ & + (1.5804 - 5.6709B + 1.6900B^2 + 5.3873B^3)\lambda^2\\ & + (-4.6494 + 21.058B - 4.1818B^2 - 19.802B^3)\lambda^3\\ & + (5.5040 - 28.913B + 4.0856B^2 + 27.079B^3)\lambda^4\\ & + (-2.2419 + 13.113B - 1.2682B^2 - 12.130B^3)\lambda^5\end{aligned} \quad \cdots\cdots(10.d)$$

$$B = 100(x - 1.99) \quad \cdots\cdots(10.e)$$

ねじり問題では図４（a）に示すように引張り[(1)]や曲げ[(2)]と異なり，切欠きが鋭い場合$\rho\to 0$（即ち$x\to 2$）の近似はあまり良くない．このことと関連して式（１０）に示すように近似式を３つに分ける必要がある．図１２に，式（10）の$K_t/K_{tN}$の値を図示する．図１３は，$K_t$の値を線図にしたものである．

## 9．結　言

本研究では，切欠きを有する丸棒ねじり問題を考慮した，開き角の影響を調べたほか切欠きが浅い場合や深い場合の厳密解ならびに体積力法によって得られた解析結果を基に物理的考察を行い，開き角$\omega=60^\circ$における切欠き形状の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える高精度の計算式を提案した．得られた結論をまとめると以下のようになる．

(1)　切欠きが浅くなった場合の極限（図１で$2t/D\to 0$）に相当する，半無限板の切欠き半径$\rho/t=0\sim\infty$，開き角$\omega=0^\circ\sim 90^\circ$に対する応力集中係数$K_{ts}$を求めた．その応力集中係数$K_{ts}$は，開き角$\omega$が$\omega=0^\circ\to 90^\circ$と増加するに従って．最大で２倍程度まで低下する．その低下は，$\rho/t$が小さいほど顕著に表れる．即ち，浅く鋭い切欠きでは引張りや曲げの場合と大きく異なり切欠きの開き角の影響が大きく表れるので注意が必要である（図２）．

(2)　切欠きが深くなった場合の極限（図１で$2t/D\to 1$）に相当する，深いＶ形切欠きにおいて，任意の切り欠き半径$a/\rho$，開き角$\omega=0^\circ\sim 90^\circ$に対する応力集中係数$K_{td}$を求めた．その応力集中係数$K_{td}$は，$\omega=0^\circ\sim 90^\circ$の変化に対して最大５％程度変化する．即ち，切欠きが深い場合には切欠きの開き角の影響は比較的小さい（図３）．

(3)　切欠きを有する丸棒のねじり問題（図１）では，浅い切欠きの解（図２）による近似は極めて悪いけれども深い切欠きの解（図３）による近似は引張り問題と比べて良好である．このようなねじり問題における特徴を利用して，開き角$\omega=60^\circ$のすべての切欠き寸法に対して誤差１％程度以内で応力集中係数を与える計算式を提案した（式（10））．

## 文　献

(1) 野田尚昭・西谷弘信・高瀬康・篠崎正孝，切欠き形状の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える計算式（鋭い60°Ｖ形および鈍い円弧形切欠きを有する丸棒引張試験片），機論，63-613，A (1997)，1926-1931．
(2) 野田尚昭・高瀬康・神崎健太郎・西谷弘信，切欠き形状の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える計算式（円弧形および60°Ｖ形切欠きを有する回転曲げ試験片），機論，64-625，A(1998)，2251-2256．
(3) Neuber, H., Kerbspannungslehre, (1957), 11, Springer-Verlag.
(4) 西谷弘信・野田尚昭，60°Ｖ形切欠きを有する丸棒の引張りにおける応力集中問題の考察，機論，51-461，A(1985)，54-62．
(5) 西谷弘信・野田尚昭，浅い円弧形切欠きを有する疲労試験片のねじり，引張り，曲げにおける応力集中，機論，51-463，A (1985)，775-783．
(6) 高瀬康・野田尚昭・高艶・竹本智一，切欠きの開き角の影響を考慮した切欠き寸法の全範囲に対して有効な応力集中係数の計算式，材料，52-7，(2003)，795-800．
(7) 野田尚昭・高瀬康・門田圭司，切欠きを有する丸棒および帯板における応力集中係数の計算式，機械の研究，48-7，(1996)，757-762．
(8) 野田尚昭・孫志強・高瀬康・王清，鋭いＶ形切欠きを有する丸棒のねじりにおける特異性応力場の強さ，機論，66-649，A (2000)，1724-1729．